

# Cálculo I

## Examen IX

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Cálculo I

# Examen IX

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024

**Asignatura** Cálculo I.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** José Luis Gámez Ruiz.

**Descripción** Examen de evaluación continua.

**Fecha** 12 de noviembre de 2024.

**Ejercicio 1.**

- a) [0.5 puntos] Definición de *Sucesión convergente*.
- b) [0.5 puntos] Definición de *Sucesión de Cauchy*.
- c) [2 puntos] **Enuncia (0.5p) y demuestra (1.5p)** el *Teorema de complitud de  $\mathbb{R}$* . En la demostración, supondremos conocido el *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, así como que toda sucesión de Cauchy es acotada.

**Ejercicio 2.**

- a) [1 punto] Si  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , demuestra que  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  (es conocida como la *desigualdad de las medias*). Analiza en tu demostración (y especifica) cuándo puede darse la igualdad.
- b) [4 puntos] Consideremos la sucesión  $\{x_n\}$ , definida mediante:

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{5}{x_n}}{2}$$

(observa que la fórmula recurrente es una media aritmética).

Se pide:

- Probar que  $\sqrt{5} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- Probar que  $\{x_n\}$  es decreciente.
- ¿Es  $\{x_n\}$  convergente? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, calcula el límite.
- Calcula también  $\lim \left\{ \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n^2 - 5} \right\}$ .

**Ejercicio 3.** [2 puntos] Estudia la convergencia de la siguiente sucesión calculando, en su caso, el límite:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\}$$