Cálculo I
Examen IX

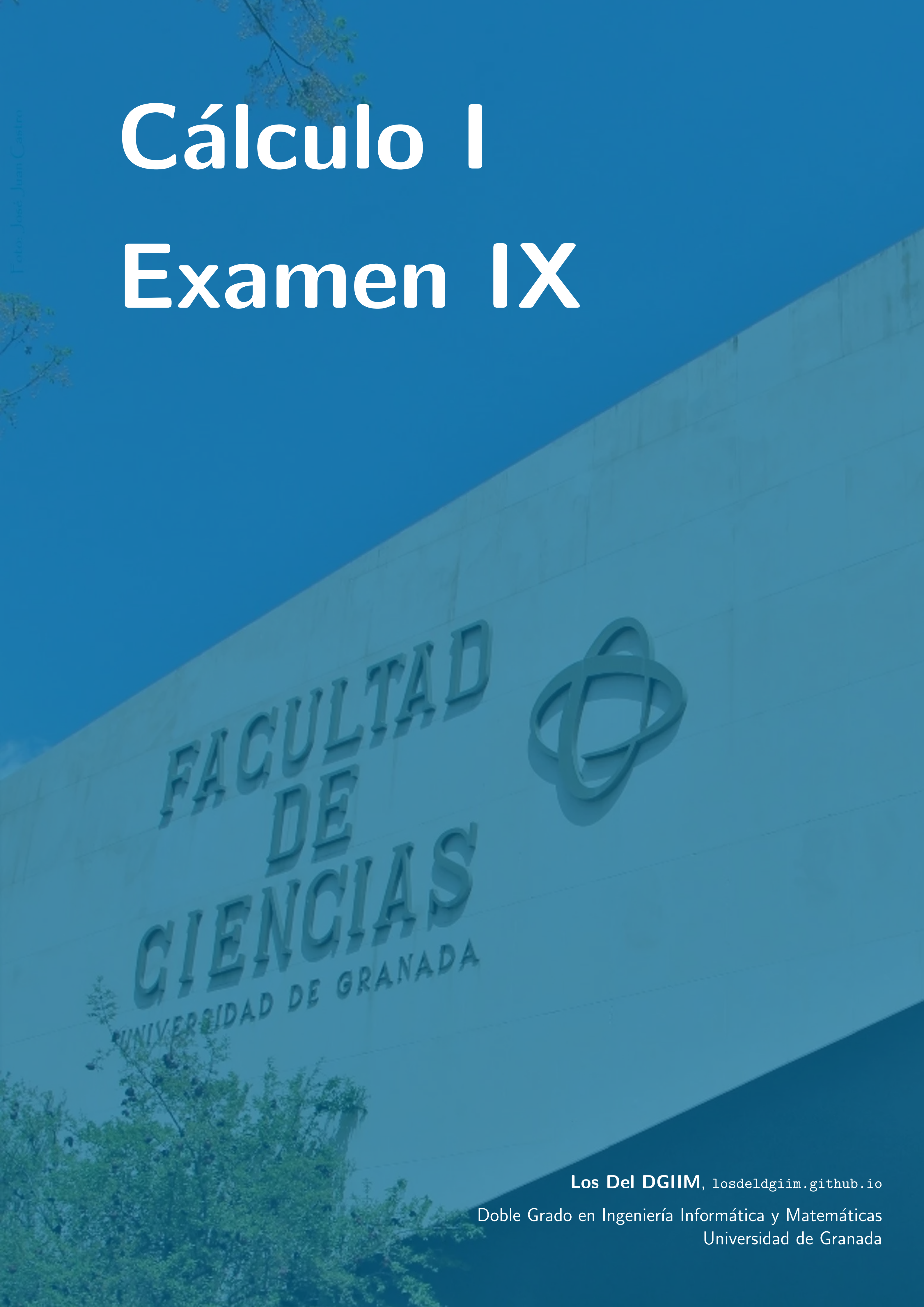

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen IX

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruiz.

Descripción Examen de evaluación continua.

Fecha 12 de noviembre de 2024.

Ejercicio 1.

a) [**0.5 puntos**] Definición de *Sucesión convergente.*

b) [**0.5 puntos**] Definición de *Sucesión de Cauchy.*

c) [**2 puntos**] **Enuncia (0.5p)** y **demuestra (1.5p)** el *Teorema de complitud de* $\mathbb{R}$. En la demostración, supondremos conocido el *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, así como que toda sucesión de Cauchy es acotada.

Ejercicio 2.

a) [**1 punto**] Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, demuestra que $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (es conocida como *la desigualdad de las medias*). Analiza en tu demostración (y especifica) cuándo puede darse la igualdad.

b) [**4 puntos**] Consideremos la sucesión $\{x_n\}$, definida mediante:

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{5}{x_n}}{2}$$

(observa que la fórmula recurrente es una media aritmética).
Se pide:

- Probar que $\sqrt{5} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Probar que $\{x_n\}$ es decreciente.
- ¿Es $\{x_n\}$ convergente? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, calcula el límite.
- Calcula también $\lim \left\{ \dfrac{x_n - x_{n+1}}{x_n^2 - 5} \right\}$.

Ejercicio 3. [**2 puntos**] Estudia la convergencia de la siguiente sucesión calculando, en su caso, el límite:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\}$$